DIFFÉRENTS TYPES DE NOMBRES

1. Entiers naturels et nombres premiers

Notation : l'ensemble des entiers **naturels** {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; ...} est noté $\mathbb{N}$.

C'est un ensemble infini. En effet, chaque entier naturel n possède un successeur $n + 1$.

Définition

On appelle nombre premier tout entier naturel qui possède exactement deux diviseurs : 1 et lui même.

Exemples et contre-exemples :

- Prenons $n = 12$. Ses diviseurs sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12

  Ce nombre possède 6 diviseurs .(On peut l'écrire $12 = 3 \times 4$ ou 2×6)
- Prenons $n = 37$. Ses diviseurs sont : 1 ; 37

  37 est donc un nombre premier.
- Le nombre 1 n'est pas premier puisqu'il ne possède qu'un seul diviseur et pas deux.

2. Entiers relatifs

Considérons une équation du type : $x + 14 = 5$

Admet-elle une solution dans l'ensemble $\mathbb{N}$? Non, car $5 - 14$ n'est pas un entier naturel. C'est pourquoi, on introduit un ensemble plus grand dans lequelle cette équation aura une solution.

Notation : l'ensemble des entiers **relatifs** {... ; –5 ; –4 ; –3 ; –2 ; –1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; ...} est noté $\mathbb{Z}$.

C'est, comme $\mathbb{N}$, un ensemble infini.

3. Nombres rationnels - Nombres décimaux

Considérons maintenant une équation du type :

$$4x + 1 = 2$$

Cette équation admet-elle une solution dans l'ensemble $\mathbb{Z}$? Non, car si on divise l'entier 1 par 4, on n'obtient pas un entier mais un nombre fractionnaire. Essayons d'y voir plus clair parmi les nombres fractionnaires.

Définition

On appelle nombre rationnel tout nombre qui peut s'écrire $\dfrac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

($\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers naturels **non nuls**)

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Autrement dit, un rationnel est une fraction d'entiers.

Exemples :

- $\frac{7}{11}$; $\frac{-5}{13}$; $\frac{1}{2}$ sont des nombres rationnels.
- $\frac{0,7}{0,9}$ est aussi un rationnel car on peut l'écrire $\frac{7}{9}$.
- Tout nombre entier n est un rationnel car on peut toujours l'écrire $n = \frac{n}{1}$.
- π ; $\sqrt{2}$ ne sont pas des nombres rationnels. On dit que ce sont des nombres irrationnels.

Théorème : (admis)
Un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique (à partir d'un certain rang).

Exemples et contre-exemples :

- 0,2006200620062006... (2006 se répétant périodiquement dans le développement décimal) est donc un nombre rationnel. En effet, on peut vérifier qu'il s'agit de la fraction $\frac{2006}{9999}$.
- 0,123456789101112131415161718192021... n'est pas rationnel (pas de période).

(Ce nombre s'appelle "nombre de Champernowne")

Parmi les nombres rationnels, on peut en distinguer des particuliers :

$\frac{1}{4} = 0{,}25$ ← Ici, le développement décimal s'**arrête**.

$\frac{1}{3} = 0{,}333333...$ ← Ici, le développement décimal est **illimité**.

Définition : On appelle nombre décimal tout nombre rationnel dont le développement décimal est fini.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemples et contre-exemples :

- Les nombres $\frac{1}{4} = 0{,}25$; $\frac{1}{10} = 0{,}1$; $\frac{7}{5} = 1{,}4$ sont décimaux.
- Tout entier (naturel ou relatif) est, bien sûr, un nombre décimal
- $\frac{1}{3} = 0{,}3333...$; $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857....$ ne sont pas décimaux.

Propriété : Un nombre rationnel est décimal si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$

En effet, lorsqu'il y a un nombre fini de décimales après la virgule, on peut facilement obtenir un entier en le multipliant par une puissance de 10 (par exemple : $0{,}25 \times 10^2 = 0{,}25 \times 100 = 25$) alors que ce n'est pas possible lorsque le développement décimal est illimité (essayer avec 0,333333...).

Méthode pour savoir si un nombre donné est décimal ou non :

1. On met le nombre sous forme de fraction irréductible.
2. Si le dénominateur est de la forme $2^p \times 5^q$ (où p et q sont des entiers naturels) alors ce nombre est décimal, sinon il ne l'est pas.

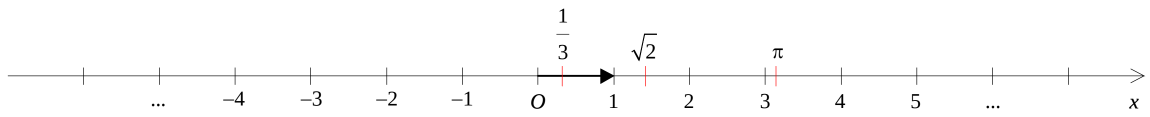
4. Nombres réels

Considérons maintenant une équation du type : $x^2 = 2$

Cette équation admet-elle une solution dans l'ensemble $\mathbb{Q}$? Non, car il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré soit égal à 2. Là encore nous devons travailler dans un ensemble plus grand.

Définition

Les nombres réels sont les nombres qui sont représentés sur une droite graduée.



A tout point de la droite correspond un unique réel (appelé abscisse du point).

A tout nombre réel correspond un unique point de la droite.

Question : $\mathbb{R}$ est-il l'ensemble de nombres le plus grand que l'on puisse imaginer ? Oui, tant que l'on place des nombres sur une droite. Cependant, l'équation $x^2 + 1 = 0$ admet-elle des solutions dans $\mathbb{R}$? Non, car le carré d'un réel n'est pas négatif. Si on veut cependant que cette équation admette des solutions, il faudra imaginer un ensemble plus grand, ce sera l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes (mais ces nombres complexes ne seront plus représentés sur une droite mais dans un plan et seront vus en classe de 1er ou terminale...)

5. Comparaisons des différents ensembles de nombres

Notons $\wp$ l'ensemble des nombres premiers. On a les inclusions suivantes : $\wp \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$